אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & o & \pi \\ \varpi & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

1) $\begin{array}{l} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{array}$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{array}{l} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{array}$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$
$R_1 \to 5R_1-8R_2$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

9*) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

F=£ , F=¡

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה ¡ ופעם מעל השדה £ .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

1) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=14 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד.   ב. אף פתרון.   ג. אינסוף פתרונות.

1) $$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד.   ב. אף פתרון.   ג. אינסוף פתרונות.

1) $$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד.   ב. אף פתרון.   ג. אינסוף פתרונות

1) $$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל **השדה** $\mathbf{F}$.

1) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+4x_2+4x_3&=2\\ 3x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{F}=¢_5}$

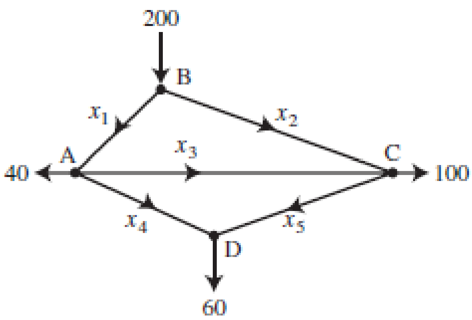
2) $$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{F}=£\ ,\ \mathbf{F}=¡}$

(12) נתונה המערכת :
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$$

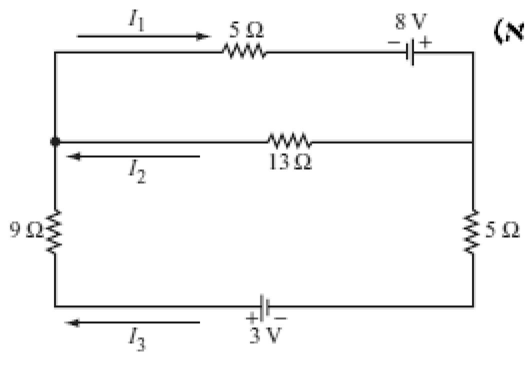
א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת : 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.
ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.
ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ״ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4=0$.

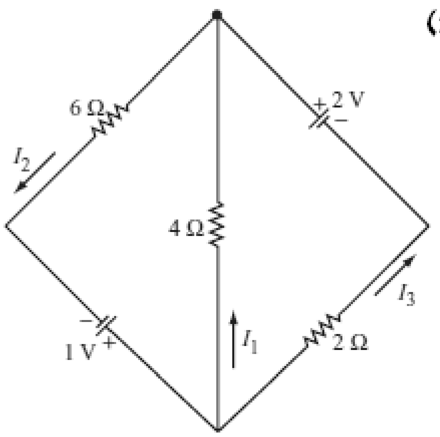


(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם) :

א)



ב)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

תשובות:

(1) 1) ו- 3) שקולות ו- 2) ו- 4) שקולות.

(2) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1) $R_1 \to 2R_1 + R_2$ 2) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ 2) $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

(5) ב.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9 $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

F=£ F=¡

(6)

(1 $(x,y)=(1,2)$ (2 $(x,y)=(5-2t,t)$

(3 ϕ (4 ϕ

(5 $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$ (6 $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

(7 $(x,y)=(-1,1)$ (8 ϕ

(9 $(x,y)=(\frac{1+2t}{3},t)$ (10 $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

(11 ϕ (12 $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(7) 1) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=1$ ג. $k=-2$ 2) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=-2$ ג.
$k=1$

3) א. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ ב. $k=\frac{4}{7}$ ג. $k=-1$ 4) א. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ ב. $k=1,\ k=-0.4$

5) א. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ ב. $k=\pm 1, k=-2$.

6) א. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ ג. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$.

(8) 1) א. $k=-1$ ב. $k\neq\pm1$ ג. $k=1$ 2) ב. $k=3$ ג. $k\neq 3$ 3) א. $k\neq 1$ ב. $k=1$

(9)

1) א. $a\neq 2$ ב. $a=2,\ b\neq -3$ ג. $a=2, b=-3$.

2) ב. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$ ג. $a=-6,\ b=2.5$.

3) ב. $a=2,\ b\neq 2$ ג. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

(10) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

(11)

1) $(x_1,x_2,x_3)=(0,3,0)$ 2) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$, $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

(12) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1$, $k\neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$

ד. $\left(x,y,z\right)=\left(1+0.2t,0.8t,t\right)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

(13) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$.

ג. 40 .

(14) א. $I_1=\frac{255}{317},\ I_2=\frac{97}{317},\ I_3=\frac{158}{317}$. ב. $I_1=-\frac{5}{22},\ I_2=\frac{7}{22},\ I_3=\frac{6}{11}$

פרק 2 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$
6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x,y,z, אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$
6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. A^2-B^2 סימטרית. 3. A^2+B סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

1) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x-2y+2z&=5 \\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ y+z+t&=1 \\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

1) $AXC=D$

2) $A^{-1}XC=A^{-1}DC$

3) $P^{-1}X^TP=A$

4) $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$

5) $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

6) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

ב. נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

ג. נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

ד. נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ג. נתונים: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I-A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

<u>תשובות:</u>

(1) 1) 4×6 2)   3) 4×2 4)   5)
6) 6×6 7) 6×2 8)   9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3)
1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$
5) 230
6) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$
8) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$
9) 63
10) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(4)
1) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5)
1) $\begin{aligned} 4x-2y+4z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x-6y+3z&==3 \end{aligned}$
2) $\begin{aligned} -2y+4z&=1 \\ x-5y+z&=2 \\ x-6y-z&=3 \end{aligned}$
3) $\begin{aligned} (4+k)x-2y+4z&=1 \\ x+(k-1)y+z&=2 \\ x-6y+(3+k)z&=3 \end{aligned}$
4) $\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x-6y+2z&=0 \end{aligned}$
5) $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ -2x-3y-6z&=6 \\ 4x+y+z&=9 \end{aligned}$

(6) א. 1,2,3   ב. 2   ג. 1,2,3

(7)

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) 1) $k \neq 1,\ k \neq -2$. 2) $k = 1,\ k = -4$

(9) 1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. 2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. $CD^2 - A$.

5. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

ב. $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B = \dfrac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1} = -\dfrac{1}{48}B^2 + \dfrac{1}{12}B + \dfrac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

פרק 3 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

(1 $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ (2 $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

2) $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

3) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

4) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

7*) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}$$

9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3 , $|A|=4, |B|=2$. חשב:

1) $|ABA^{-1}B^{T}|$ (2 $|4A^{2}B^{3}|$ (3 $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ (4 $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4 , $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3 , $B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבור למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש-A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות:

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29. 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.
11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$, $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13}. 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18,\ |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n. **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}-7 & 10 & 20 & -4\\ 2 & -3 & -6 & 1\\ -3 & 5 & 8 & -2\\ 1 & -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -20 & 4\\ -2 & 3 & 6 & -1\\ 3 & -5 & -8 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

פרק 4 - מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3:

א. $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$.

ב. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$.

ג. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$.

ד. $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$.

ה. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$.

ו. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a+d,\ c=a+2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$ כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.

כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W=\{A|\ AB=0\}$.

ז. W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\,|\,tr(A)=0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)\,|\,p(4)=0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4. כלומר, $W=\{p(x)\,|\,\deg(p)\le 4\}$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\le n\le 7$.

ו. $W=\{p(x)\,|\,p(0)=1\}$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\,|\,f(-x)=f(x)\}$.

ב. W מורכב מכל הפונקציות החסומות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\,|\,\left|f(x)\right|\le M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W=\left\{f(x)\,|\,f'(x)=0\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W=\left\{f(x)\,|\,f'(x)=1\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W=\left\{f(x)\,|\,f(x)=f(x+1)\right\}$.

(5) בדוק האם $W=\left\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\right\}$ הוא תת מרחב של C^3:

א. מעל השדה הממשי R.

ב. מעל שדה המרוכבים C.

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים:

$u_1=(4,1,1,5)$, $u_2=(0,11,-5,3)$, $u_3=(2,-5,3,1)$, $u_4=(1,3,-1,2)$.

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4?

2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלוייה לינארית?

ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2?

2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלוייה לינארית? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2?

2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלוייה לינארית? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ד. נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2?

2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$.

3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

ה. נתון $v=(a,b,c,d)$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית?

ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 ו- u_3.

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 , u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.
2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים :

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$
.
$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.
2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a,b,c הוקטורים הבאים תלויים לינארית :

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}.$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלוייה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף של הוקטורים האחרים :

א. $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

ב. $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

ג. $\{u+v,v+w,w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C. ב. מעל R.

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

1) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right\}$

2) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 16\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right\}$

3) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

1) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3 \}$

2) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

3) $\{ 1+2x+3x^3,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3.

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של

<u>מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית</u>

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad (1 \qquad \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad (2 \qquad \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases} \quad (3$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3) .

א) מצא בסיס וממד ל- W , U ו- V.

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. 2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(18) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(19) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(20) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(21) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \mid A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(22) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1 + x - x^2 + 2x^3, 4 + x - x^2 + x^3, 2 - x + x^2 - 3x^3\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

<u>מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה</u>

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת המטריצה (rank) :

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

(1 $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$ (2 $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$ (3 $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\ \ B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

פרק 5 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.
ב. מצא פולינום אופייני.
ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
ה. מצא וקטורים עצמיים.
ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.
ט. מצא את הפולינום המינימלי.
י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

(1 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4 $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (5 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$ (6 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
1. $|A|=|B|$. 2. $tr(A)=tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP=B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

פרק 6 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות

העתקות לינאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) לינארית. הגדר את המושג אופרטור לינארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה לינארית.

1) $T:R^2 \to R^2$; $T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3 \to R^3$; $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3 \to R^2$; $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2 \to R^3$; $T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T:R^3 \to R^3$ $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=BA+AB$ $\left(B\in M_n[R]\right)$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$; $T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F]$; $T\left(z\right)=\overline{z}$ $\left(F=C,F=R\right)$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית :

$$T:R^2\to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(0,0,1)=(7,8,9)$.

ב. $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

ג. $T:R^4 \to R^3$ כך ש- $T(0,4,0,2)=(2,2,-2), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(1,2,-1,0)=(0,1,-1)$.

ד. $T:P_2[R] \to P_2[R]$ כך ש- $T(1-x)=x^2+1, T\left(4x+x^2\right)=x, T(1)=4$.

<u>תמונה וגרעין של העתקות ליניאריות</u>

(5) נתונה העתקה ליניארית $T:V \to U$. הגדר והדגם את המושגים :

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$.   ב. התמונה של ההעתקה - $\operatorname{Im}T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה- $\operatorname{rank}T$ והאיפוס של העתקה - $\operatorname{null}T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

1) $T:R^4 \to R^3$, $T(x,y,z,t)=(x+y, y-4z+t, 4x+y+4z-t)$

2) $T:R^3 \to R^4$, $T(x,y,z)=(x-4y-z, x+y, y-z, x+4z)$

3) $T:R^4 \to R^3$, $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

4) $T:M_2[R] \to M_2[R]$, $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot A$

5) $T:P_2[R] \to P_2[R]$, $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

6) $D:P_3[R] \to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

(7) מצא העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה ליניארית $T:V \to U$. הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im}T = \dim KerT$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על.
כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא חח"ע, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

פעולות עם העתקות לינאריות

(11) תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$S(x,y,z)=(x-z,y) \quad , \quad T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ 2) $4S$ 3) $4S-10T$ 4) TS 5) ST

6) T^2 7) T^{-1} 8) T^{-2} 9) S^{-1} 10) S^2

פרק 7 - מטריצות והעתקות לינאריות

הערה: כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1) $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$ 2) $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$ 3) $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3\ ,\ T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות :

1) $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$ 2) $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3) $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3. יהי T אופרטור ליניארי על R^3.

נתון כי: $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ ו- $\left[T\right]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$

חשב את $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$ ואת $\left[T\right]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס</u>

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות ביחס לבסיסים

הסטנדרטיים של R^n.

א. $T:R^2\to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$.

ב. $T:R^4\to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$.

(6) תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$

של R^3 לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2. כלומר את $\left[T\right]_{B_1}^{B_2}$.

פרק 8 - מספרים מרוכבים

(1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את z .

$z^2+9=0$ (1 $z^2-4z+5=0$ (2 $z^2-6z+13=0$ (3 .

(2) חשב:

$(i\sqrt{2})^6$ (1 $(i^5-i^{13})^2$ (2 $(4+i)-(2+10i)$ (3 $(-4-i)(2-3i)$ (4 .

(3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

$\frac{5}{2+i}$ (1 $\frac{1+i}{1-3i}$ (2 $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$ (3

(4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב z :

$2z-6i=\overline{z}-1$ (1 $z\overline{z}-5\overline{z}=10i$ (2 $(1+i)z^2+2z-i+1=0$ (3 .

(5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

$1+\sqrt{3}i$ (1 $-1-i$ (2 $-3-\sqrt{3}i$ (3 $1-i$ (4

$1+i$ (5 $\sqrt{3}-i$ (6 $\sqrt{3}i$ (7 -8 (8

(6) חשב:

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ (1 $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$ (2 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

$\sqrt[6]{-8}$ (4 $\sqrt[5]{1}$ (5 $\sqrt[3]{-8}$ (6

(7) א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

(8) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(9) פתור את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

(10) א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(11) א. פתור את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$.

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$ באשר q מנת הסדרה.

(12) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(13) נתונה המשוואה $(iz+1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 .

ב. הראה כי $\sqrt{3.25} = \left|\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}\right|$.

(14) נתונה המשוואה $(z-1)^3 = 1$. הוכח שסכום שורשיה הוא 3.

(15) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

א. מצא את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3 .

ב. מצא את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.

ג. הראה כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(16) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, z הוא מספר מרוכב.

כאשר s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .

ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצא את הפרמטרים s ו- t .

(17) א. פתור את המשוואה $\bar{z}\cdot i+\left(\bar{z}\right)^2+|z|^2+z+\bar{z}=0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א. , הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה

שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא : $1+\frac{1}{16}i$. האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה : סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה : $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$

באשר d נקרא הפרש הסידרה.

(18) נתון : $v=(5+i, 2-3i, 7+2i)$, $u=(3-2i, 4i, 1+6i)$. מצא :

1) $4u+v$ 2) $2i\cdot u-v$ 3) $u\cdot v$

4) $u\cdot u$ 5) $|u|$ 6) $|v|$

תשובות:

(1) 1) $\pm 3i$ 2) $2\pm i$ 3) $3\pm 2i$. **(2)** 1) -8 2) 0 3) $2-9i$ 4) $-11+10i$.

(3) 1) $2-i$ 2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ 3) $-\frac{1}{2}+i$.

(4) 1) $z=-1+2i$ 2) $z=1+2i, z=4+2i$ 3) $z=i, z=-1$.

(5) (1) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$ 3) $\sqrt{12}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$

4) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$ 5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ 6) $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

7) $\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ 8) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$ **(6)** 1) $\frac{1}{32}i$. 2) -2^9. 3) -1.

4) $k=0,1,2,3,4,5$ $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right)$.

5) $k=0,1,2,3,4$ $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right)$.

6) $k=0,1,2$ $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right)$.

(7) $z_1=cis60^\circ, z_2=cis240^0, z_3=cis120^\circ, z_4=cis300^\circ$.

(8) א. $z_1=1+\sqrt{3}i, z_2=-\sqrt{3}+i, z_3=-1-\sqrt{3}i, z_4=\sqrt{3}-i$. **(9)** $z=0$, $z=1$, $z=-1$.

(10) א. $z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_3=-i$.

(11) א. $n=1,2,3,4,5$ $z_n=2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]$. ב. $q=cis72^\circ$.

(12) א. $z_1=cis45^\circ, z_2=cis165^\circ, z_3=cis285^\circ$. **(13)** א. $1+(1+\sqrt{3})i, -1+(1-\sqrt{3})i$.

(15) א. $z_1=\sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2=\sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3=\sqrt[3]{2}cis290^\circ$. ב. 6. ג. $24i$.

(16) א. $z_2=-3s-\frac{t}{3s}i$, $z_2=-3s-\frac{t}{3s}i$. ב. $t=9$, $s=\pm1$. **(17)** א. $z_1=0$,

$z_2=-0.5+0.5i$. ב. $a_1=-8.5$. **(18)** א. $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$.

ב. $(-1+5i,-10+3i,-19)$. ג. $20+35i$. ד. 66. ה. $\sqrt{66}$. ו. $\sqrt{92}$.

פרק 9 - וקטורים

<u>הערה</u>: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\mathbf{u}, \vec{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$ ז. $\underline{u}/|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u},\underline{v})$ ט. $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$ י. $proj(\underline{u},\underline{v})$

* בסעיפים ז,ח,י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\vec{AC}+\vec{AB}$ ב. $2\vec{AC}-4\vec{AB}$ ג. $2\vec{AC}+\vec{AB}-\vec{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x=(1,2,3)+t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x=1+2t,\ y=10,\ z=4-t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D=(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z .

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4,5,6)$ ומקביל לציר z .

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ והמאונך לישר

$\underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר l_2 העובר דרך הנקודה $P(-4,1,1)$, מאונך לישר

$l_1:\ (2,-3,1)+t(1,4,-3)$ וחותך אותו.

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,0,1)+s(-4,1,5)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x=1+2t-s,\ y=10+t,\ z=4-t+s$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא

הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

(11) נתונות הנקודות: $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר , המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על

הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

(12) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כמתואר בציור.

נתון: $|\vec{AA'}|=6$, $|\vec{AD}|=2$, $|\vec{AB}|=4$, $C'F=FB'$.

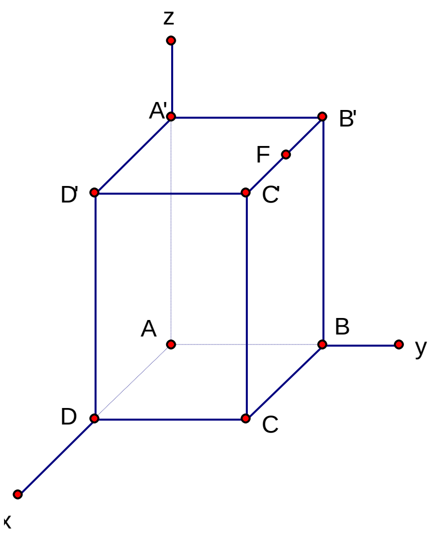
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר

דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר

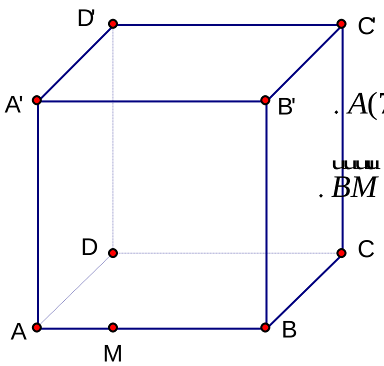
העובר דרך $A'DB$.

ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר

העובר דרך $A'DB$.



לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל-



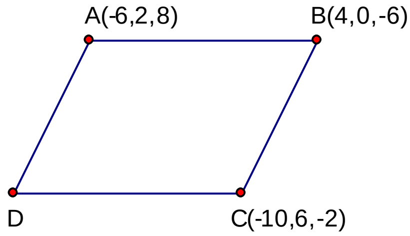
(13) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתונים הקודקודים :

$A(7,-9,5),\ B(1,-3,-7),\ C(-5,-1,-3),\ C'(-1,7,-1)$.

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$.

א. חשב: $|\overrightarrow{MA'}|,\ |\overrightarrow{MC}|$.

ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A'MC$.



14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

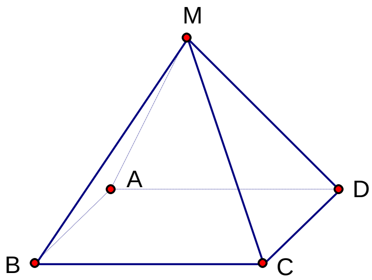
א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.

(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

וקודקודה M (ראה ציור). נתון:

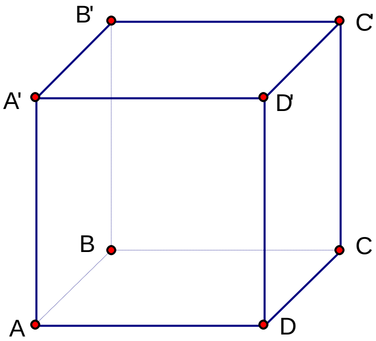
$A(3,6,-1),\ B(-1,2,-3),\ C(7,6,-3),\ M(4,-3,-4.5)$.



א. מצא את גודל זווית $S\ ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

ג. מצא את נפח הפירמידה.



(16) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

נתון: $A(1,2,0),\ C(4,0,1),\ D(2,2,-1),\ B'(9,12,8)$

חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם:

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0),\ \underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$.

ב. $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1),\ \underline{x} = (1,-1,0) + t(12,-3,1)$.

ג. $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1),\ \underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$.

ד. $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4),\ \underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$.

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את <u>נקודות החיתוך</u> ואת <u>הזווית</u> בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את <u>המרחק</u> ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים:

$$l_1 : (x,y,z) = (4,3,1) + t(1,-3,2)$$
$$l_2 : (x,y,z) = (5,-1,4) + m(-1,3,5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את l_2 ומקביל ל- l_1.

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים:

$$l_1 : (x,y,z) = (3,1,1) + u(2,-1,-2)$$
$$l_2 : (x,y,z) = (3,9,-6) + m(6,2,-1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.

אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות: $P(k,0,0)$, $Q(0,4,0)$, $R(0,k,3)$, $S(1,1,-1)$.

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,

ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר l_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר l_2 היא : $l_2: (2,k+1,3)+t(k^2-9,-7,0)$.

א. 1. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

2. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π , המכיל את הישר l_1 ומקביל לציר ה- z .

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1. , מצא את המרחק של l_2 מהמישור π.

(22) נתונות ארבע נקודות : $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר l_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B.

הישר l_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D.

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א. , מצא את משוואת המישור המכיל את הישר l_1

ומקביל לישר l_2 .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר :

חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזוית בין הישר

למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר l עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$

ונתון מישור $\pi: x-4y-kz-5=0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א , חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overrightarrow{BC}$.

(25) נתונים ישר: $l:(2,1,-1)+t(0,a,-1)$ ומישור: $\pi: x-2y-4z=4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר l ומאונך למישור π .

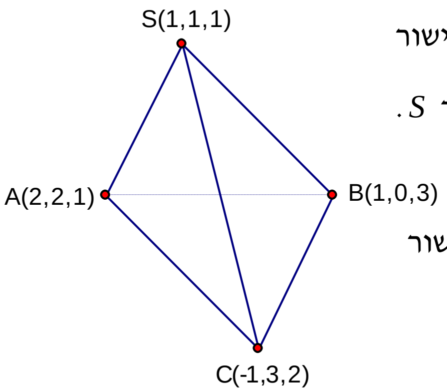
(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$l_1:(x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-1,-1)$$
$$l_2:(x,y,z)=(3,-1,2)+s(-2,1,1)$$
$$\pi:\ x-y+2z=3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר l_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בציור משמאל נתון טטראדר $SABC$.



א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S , ניצב למישור הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S.

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזוית שבין המקצוע AC לבין מישור המשולש ΔSAB.

(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $x+2y-z=7,\ 2x+3y-4z=10$.

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך l_1 של שני המישורים.

ב. נתון: $l_2:(6,2,-2)+s(2,-1,1)$. מהו המצב ההדדי בין l_1 ו- l_2.

(30) נתונים שני מישורים: $x-y+2z-7=0,\ 2x+y-3z+1=0$.

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך l של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C, יקביל הישר l למישור $\pi:4x-y+Cz-1=0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר l מהמישור π.

(31) נתונים שני מישורים: $x+y+2z=6,\ x-3y+4z=-10$ ונקודה $M(1,8,-3)$.

הישר l הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.

א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר l.

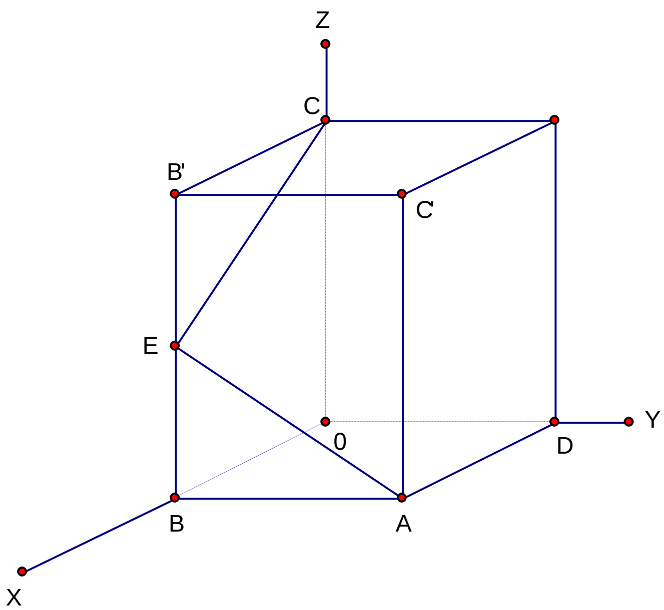
ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר l.

(32) הישר $l:(0,-2,1)+t(-3,4,m)$ מקביל למישור $\pi_1: x-2y-4z=4$.

א. מצא את הקבוע m.

ב. הנקודה $N(2,-1,4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר l מישור π_2.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2.



(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא בראשית הצירים.

E אמצע BB', $|AB|=1$.

א. חשב את זווית $\sphericalangle CEA$.

ב. חשב את הזווית בין שני המישורים AEC ו- $BODA$.

(34) נתונים שני ישרים:

$$l_1 : (1,2,3)+t(3,-12,18)$$
$$l_2 : (2,5,-1)+u(-4,16,-24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב- א., ועובר דרך הנקודה $(0,-1,0)$.

תשובות:

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

(1) $x=5, y=-2, z=6$.

(2) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$ ד. $(2.5,-1,-3.5)$
ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$ ז. $\frac{1}{\sqrt{26}}(-3,1,4)$ ח. 12.5698
ט. 14 י. $(\frac{-19}{7},\frac{19}{14},\frac{57}{14})$

(3) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

(4) א. $x=1+4t, y=2+5t, z=3+6t$ ב. $\underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

(5) א.1) $(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א.2) $(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$
א.3) $(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D
ג. 35.477°

(6) א. $t(1,0,0)$, $t(0,1,0)$, $t(0,0,1)$ ב. $(4,5,6)+t(0,0,1)$

(7) $(1,2,3)+t(2,1,0)$

(8) $(-4,1,1)+t(83,-32,-15)$

(9) א. $x=1+2t-4s, y=-2+s, z=3+t+5s$ ב. $(1,10,4)+t(2,1,-1)+s(-1,0,1)$

(10) א.1. $(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ א.2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא

(11) א. $(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. 1.4142 ג. $y-z+2=0$

(12) א. $(1,4,6)+t(6,3,2)$ ב. $\frac{18}{7}$

(13) א. $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{152}, |\overrightarrow{MA'}|=\sqrt{108}$ ב. 59.396

(14) א. $D(-20,8,12)$ ב. 81.62°

(15) א. 26.565° ב. $S=24$ ג. $V=32$

(16) $V=72$

(17) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. זווית בין הישרים 47.6°.

(18) ב. $3x+y=14$ ג. 0.31622

(19) א. מצטלבים ב. 10

(20) ב. $d=\frac{2}{15}, k=0.8$

(21) א.1. $k=-4$ א.2. $k=4$ ב. $x+y=7$ ג. 5.65685

(22) א. $k=2$ ב. $8x-4y+5z+1=0$

(23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנק' (3.5,-0.5,-2), זוית בין הישר למישור 40.78°

(24) א. $k=9$ ב. 14.67°

(25) א. $a=2$ ב. $10x+y+2z-19=0$

(26) א. l_1 מוכל, l_2 חותך. ב. $(-1,1,4), (\frac{11}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{5}{3})$

(27) א. $SC \perp SAB$ ב. $2x-2y-z+1=0$ ג. 64.76°

(28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך: $(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$. זווית 63.612°.
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם: 0.324 ג. המישורים מתלכדים.

(29) א. $(9,0,2)+t(-5,2,-1)$ ב. מצטלבים

(30) א. $(2,-5,0)+t(1,7,3)$ ב. $C=1$ ג. 2.8284

(31) א. $5x-y-2z=3$ ב. 5.07

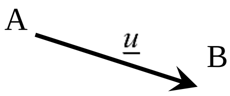
(32) א. $m=-8$ ב. $(2,-1,4)+t(-4,4,-8)$

(33) א. 78.463° ב. 35.26°

(34) א. $2x-10y-7z+39=0$ ב. $2x-10y-7z-10=0$

פרק 10 – ווקטורים:

ווקטורים גיאומטריים:



הגדרה כללית:

להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי:

ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$).

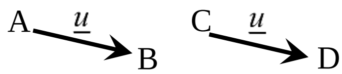
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

1. ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

דוגמא לווקטורים מקבילים:

מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

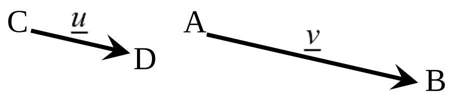


2. ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
   - ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
   - ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

עבור $\alpha>1$ מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$,

או: $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$.

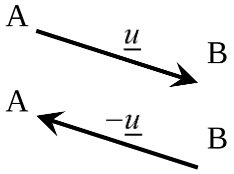


3. אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD}=a\underline{u}+b\underline{v}+c\underline{w}$ מקבילים

אז מתקיים: $\frac{\alpha}{\ }=\frac{\beta}{\ }=\frac{\gamma}{\ }$.

ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל **גודל** זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$

וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA}=-\underline{u}$.

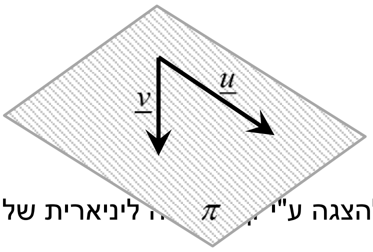


ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π.



קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

1. כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) π ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
2. כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
3. אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים **תלויים ליניארית** (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

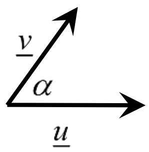
המכפלה הסקלרית וגודל של ווקטור:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos\alpha = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.



גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = \underline{u}^2$.

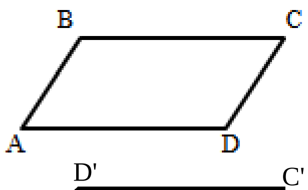
***הערה:**

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

<u>שאלות:</u>

1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

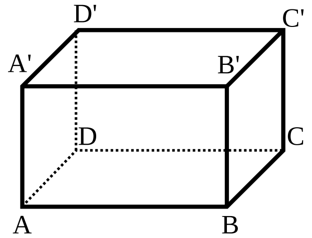
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



2) בתיבה ABCDA'B'C'D'

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

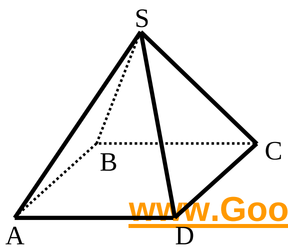
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



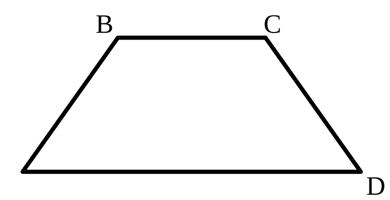
3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

מצא את כל הווקטורים שבפירמידה



השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

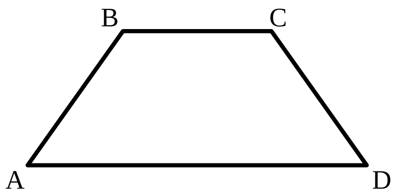


4) בטרפז $ABCD$ שבשרטוט

נתון: $AD=3BC$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$.

מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן

להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון: $AD = 3BC$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$.

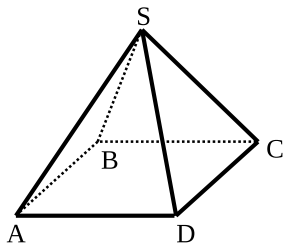
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.

הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.

הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{AF}$.



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\vec{AS}=\underline{w}$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את

הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{BN}$.

7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\vec{AP}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\vec{PB}$ ו- $\vec{AB}$.

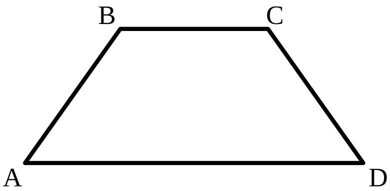
9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$.

(11 בטרפז ABCD שבשרטוט

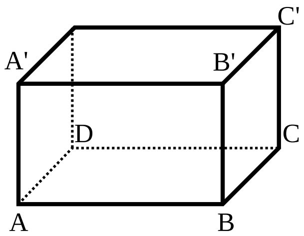


נתון: $AD = 3BC$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת: $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\vec{AF}$.

(12 בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

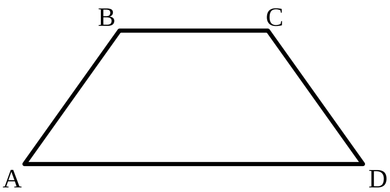


הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור: $\vec{PQ}$.

(13 בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

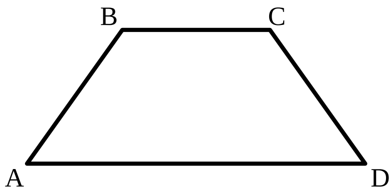


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\vec{FE} \parallel \vec{AB}$.

14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

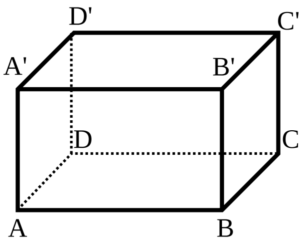


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\vec{FE} \parallel \vec{AC}$.

15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

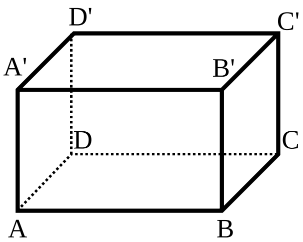
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\vec{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\vec{PQ} \parallel \vec{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\vec{PQ} \parallel \vec{EC}$.

16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

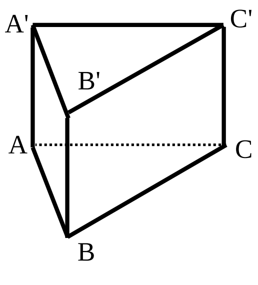
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\vec{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\vec{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\vec{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?

17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



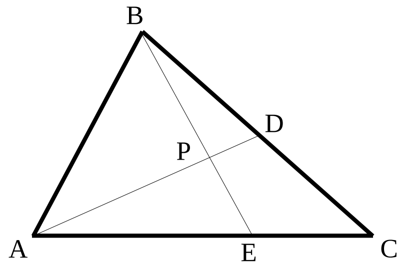
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\vec{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\vec{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\vec{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E

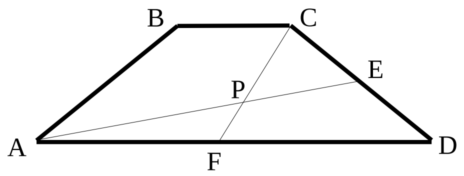
נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$, וכן: $\vec{AP}=t\cdot\vec{AD}$, $\vec{BP}=s\cdot\vec{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\vec{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



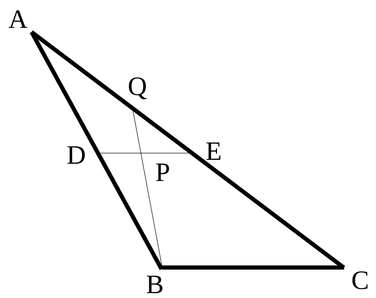
19) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת

באמצע הצלע AD.הנקודה P היא מפגש

הקטעים AE ו-CF. מצא באיזה יחס מחלקת

הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E

נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\vec{DE}\ P\vec{BC}$.

הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP

חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס : $\frac{S_{VQPE}}{S_{VDPB}}$.

21) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\vec{DD'}=\underline{w}$, $\vec{DC}=\underline{v}$, $\vec{DA}=\underline{u}$.

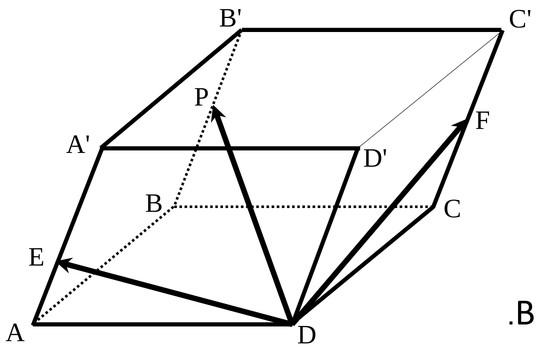
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',

הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'

ומקיימת: $A'E=2AE$ והנקודה P נמצאת

על המקצוע BB' ומקיימת: $\vec{B'P}=k\cdot\vec{B'B}$.

נתון: $\vec{DP}=t\cdot\vec{DE}+s\cdot\vec{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\vec{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|u|=3$. $|v|=2$. $\alpha=60^o$ ב. $|u|=4$. $|v|=5$. $\alpha=120^o$

ג. $|u|=2$. $|v|=6$. $\alpha=30^o$ ד. $|u|=8$. $|v|=3$. $\alpha=180^o$

ה. $|u|=3$. $|v|=5$. $\alpha=0^o$ ו. $|u|=7$. $|v|=4$. $\alpha=90^o$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

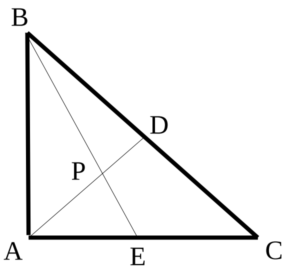
א. $|u|=3$. $|v|=4$. $u\cdot v=6$ ב. $|u|=4$. $|v|=2$. $u\cdot v=-4\sqrt{3}$

ג. $|u|=9$. $|v|=5$. $u\cdot v=0$ ד. $|u|=2$. $|v|=6$. $u\cdot v=12$

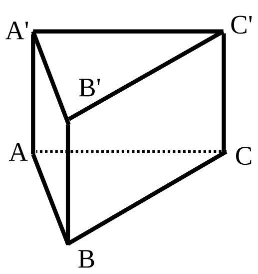
24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6\,,|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4\,,|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

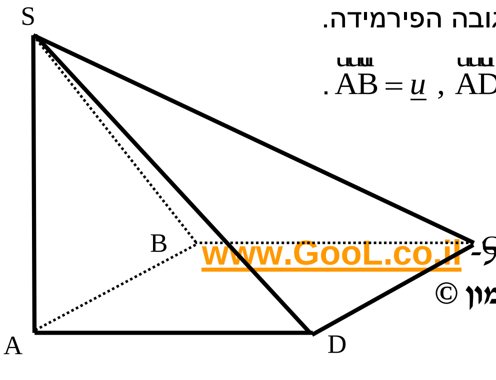
26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6\,,|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.



27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90^o$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.

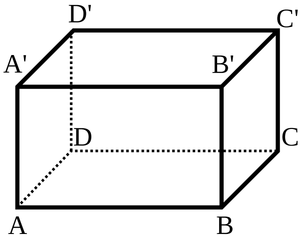


29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$. נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC

והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית: $\angle PAQ$.

(30 בתיבה ABCDA'B'C'D'



נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overrightarrow{AP}|=\frac{5}{6}|\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת: $\cos\angle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

(31 הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(32 נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

(33 נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

(34 נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

(35 נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

(36 הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

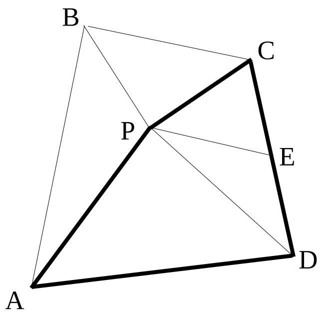
37) א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC.

הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח: $\vec{AP}=\frac{1}{3}\left(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\vec{AS}$ ו- $\vec{AP}$ מאונכים ל- $\vec{BC}$.

הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{AS}=\underline{w}$).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים

ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\vec{PE}\perp\vec{AB}$.

(הדרכה: סמן $\vec{PD}=\underline{d}$, $\vec{PA}=\underline{c}$, $\vec{PC}=\underline{b}$, $\vec{PB}=\underline{a}$).

39) בטטראדר SABC נתון: $\vec{AS}=\underline{w}$, $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP}=\alpha\cdot\vec{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ}=\beta\left(\vec{SB}+\vec{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\vec{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\vec{PQ}\perp\vec{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן.

הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים,

אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\vec{DC}$, $\underline{v}=\vec{BC}$,
$\underline{w}=\vec{AA'}=\vec{DD'}=\vec{CC'}=\vec{BB'}$.

2) $\underline{u}=\vec{DC}=\vec{D'C'}=\vec{A'B'}=\vec{AB}$, $\underline{v}=\vec{AD}=\vec{BC}=\vec{A'D'}=\vec{B'C'}$

3) $\underline{u}=\vec{DC}=\vec{AB}$, $\underline{v}=\vec{AD}=\vec{BC}$, $\underline{w}=\vec{AS}$.

4) $\vec{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\vec{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\vec{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$. ב. $\vec{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$. ג. $\vec{AF}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}$.

6) א. $\vec{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\vec{AC}=\underline{v}+\underline{u}$. ב. $\vec{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\vec{AP}=\frac{2}{\ }u$, $\vec{BP}=\frac{3}{\ }u$.

8) $\vec{AB}=\frac{8}{\ }u$, $\vec{PB}=\frac{5}{\ }u$.

9) $\vec{AP}=\alpha\underline{u}$, $\vec{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$.

10) $\vec{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$, $\vec{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\vec{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\vec{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

14) $\alpha=1$.

15) א. $\vec{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. לא. ג. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.

16) א. $\vec{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. $\alpha=1$. ג. לא.

17) א. $\vec{NM}=(\beta-1)\underline{u}+(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta)\underline{v}+\underline{w}$. ב. $\beta=1$. ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$.

18) א. $\vec{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\vec{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$. ב. $AP:PD=4:1$.

19) $CF:PF=2:1$.

20) א. $AQ:QC=1:2$. ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$.

21) א. $\vec{DP}=u+v+(1-k)w$. ב. $B'P:PB=1:5$. ג. פק.

22) א. 3 . ב. -10 . ג. $6\sqrt{3}$. ד. -24 . ה. 15 . ו. 0 .

23) א. $60°$. ב. $150°$. ג. $90°$. ד. $0°$.

24) $\vec{PQ}=18.248$.

25) $\vec{MN}=\sqrt{29}$.

26) $31.87°$.

27) $55.49°$.

28) $70.623°$.

29) $24.095°$.

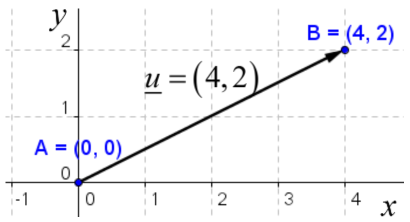
30) א. $\alpha=\frac{3}{4}$. ב. $\cos(PAO)=\frac{\frac{1}{2}}{\ }$. ג. $\alpha=\frac{1}{2}$.

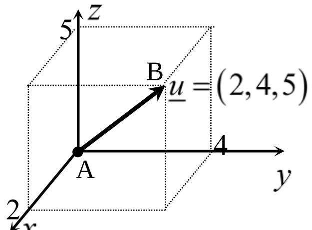
39) א. $\alpha+2\beta=1$.

וקטורים אלגבריים:

הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.





דוגמאות:

הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$,
מוצאו בנקודה $\mathrm{A}(0,0)$ וסופו בנקודה $\mathrm{B}(4,2)$.

הווקטור: $\underline{u}=(2,4,5)$ נמצא במרחב הקרטזי.
מוצאו בראשית הצירים $\mathrm{A}(0,0,0)$
וסופו בנקודה: $\mathrm{B}(2,4,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:

$$\underline{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

1. אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$

הוא: $x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_1+x_2}{2}, y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_1+y_2}{2}, z_{\mathrm{M}}=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

2. שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם:

$$x_{\mathrm{P}}=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}\ ;\ y_{\mathrm{P}}=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}\ ;\ z_{\mathrm{P}}=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}.$$

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

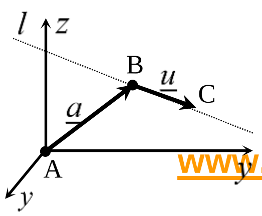
כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.



הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו
בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $l:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים
וסופו על נקודה על הישר l.

דוגמא:
עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים:
$$\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)\ ;\ \underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$$
לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

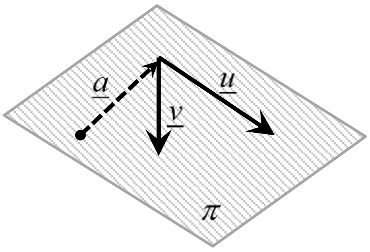
***הערות:**
1. לישר יש אינסוף הצגות פרמטרים הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:
$$l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$$
2. הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של ישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
3. הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$
(למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
4. הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותן ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים:
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:
- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:

הצגה פרמטרית של מישור:

מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ הוא **וקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}+s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על המישור π.

משוואת מישור:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

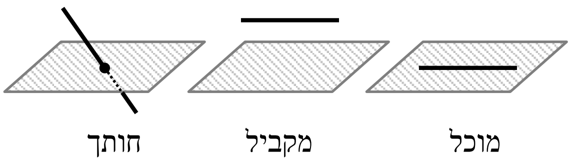
כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור

המסומן: $\underline{n}=(a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים

$\frac{a_1}{} = \frac{b_1}{} = \frac{c_1}{} = \frac{d_1}{}$	$\frac{a_1}{} = \frac{b_1}{} = \frac{c_1}{} \neq \frac{d_1}{}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות:

1. זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י:
$$\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}.$$
2. זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
3. זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha = \left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
4. זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות:

1. מרחק בין שתי נקודות $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא:
$$d_{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$
2. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\ \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י
העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא תא נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י:
$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
   - שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
   - שימוש בנוסחה: $d = \left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:

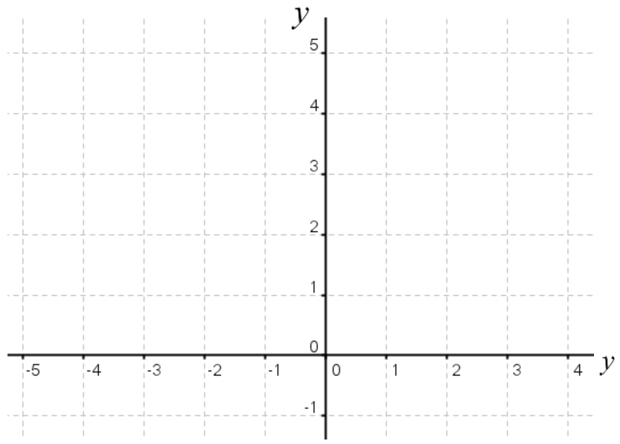
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

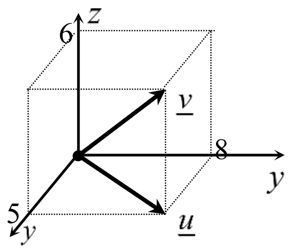
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

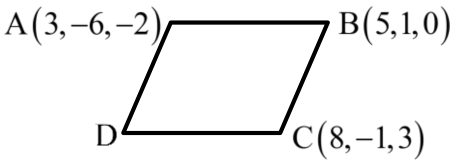
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



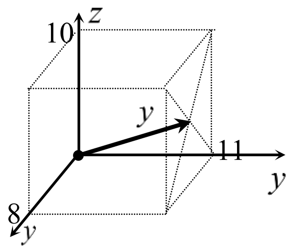
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט:



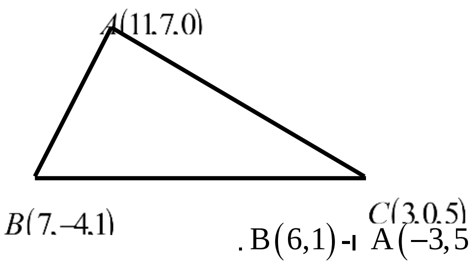
3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי
שלושה מקדקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקדקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט:



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



6) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.

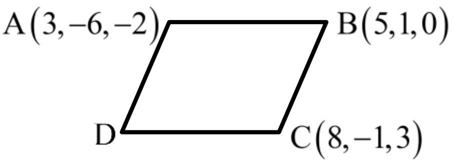
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$
והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

7) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

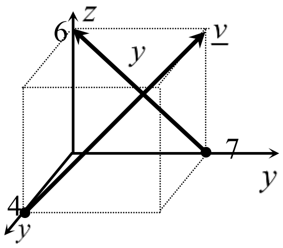
ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

8) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.



9) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$:



10) נתונים שני וקטורים: $\underline{v}=(2,-3,5)$, $\underline{u}=(3,7,1)$. חשב:

א. $\underline{u}+\underline{v}=$ ב. $\underline{u}-\underline{v}=$ ג. $2\underline{u}=$ ד. $3\underline{u}-\underline{v}=$ ה. $\underline{u}\cdot\underline{v}=$

11) חשב את גודלו של הווקטור $\underline{u}=(1,-2,4)$.

12) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:

$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

14) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}=(3,7,1)$ ו- $\underline{v}=(2,-3,5)$:

15) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

16) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם: $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

17) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $l:\ \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

19) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $l:\ \underline{x}=t(2,-1,5)$?

20) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

21) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

22) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $l:\ \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

23) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

24) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

25) מצא את נקודת החיתוך של הישר $l:\ \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

26) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_1:\ \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $l_2:\ \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

27) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_3:\ \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $l_4:\ \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

28) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_5:\ \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$, $l_6:\ \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$.

29) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_7:\ \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$, $l_8:\ \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$.

30) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_9:\ \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$, $l_{10}:\ \underline{x}=s(6,0,-2)$.

31) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_{11}: \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$, $l_{12}: \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$

32) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:

$l_1: \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$, $l_2: \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

33) נתונות הנקודות: $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.

הראה כי לכל ערך של k הישרים l_{AB} ו- l_{CD} מצטלבים.

34) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:

$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

35) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,

ומכיל את הישר $l: \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

36) נתונים שני ישרים: $l_1: \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$, $l_2: \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.

הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

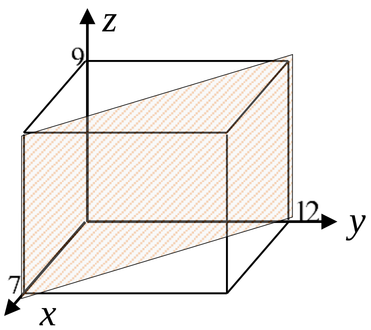
37) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$

ומכיל את ציר ה- x.

38) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

39) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו



40) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$ ב. $E(2,-1,1)$

41) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על

המישור: $\pi: kx-2y+(k+1)z+7=0$.

42) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ x+4y-z+8=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

47) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

48) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

49) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(5,-4,1)+t(0,2,-1)$, $l_2:\ \underline{x}=(0,-6,2)+s(0,-2,1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-1,1,3)+t(3,-2,4)$, $l_2:\ \underline{x}=(-7,1,0)+s(4,-3,0)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר l_1 ומקביל לישר l_2.

51) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z.

52) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

54) נתונים הישר והמישור הבאים:
$l:\ \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$, $\pi:\ 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

55) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l: \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$, $\pi: x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

56) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l: \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$, $\pi: 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

57) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l: \underline{x}=(0,3,-2)+t(1,-1,2)$, $\pi: \underline{x}=(-1,0,2)+s(1,0,-2)+r(3,0,-1)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

58) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l: \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$, $\pi: 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

59) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1: x-3y+2z-1=0$, $\pi_2: 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2: 4x-2y+8z-10=0$.
ב. $\pi_3: x+3y-z+1=0$, $\pi_4: 3x+9y-3z-8=0$.
ג. $\pi_5: 5x-2y-z+3=0$, $\pi_6: 2x+3y+z-5=0$.

61) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_2:\ 4x+12y-4z+k^2-2=0$, $\pi_1:\ 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$.

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

62) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקדקודים הבאים:

$A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$.

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

63) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1:\ 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2:\ 2x-y+z+10=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

64) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3:\ 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4:\ 2x-3y+z+4=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5:\ 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6:\ 5x-2z+20=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7:\ x-2y-z+6=0$, $\pi_8:\ z-2=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi:\ 6x-5y+z+18=0$ עם המישור $[xz]$.

68) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$, $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69) המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $l:\ \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$, $\pi:\ 4x-2y-3z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר l על המישור.

71) מצא את הזווית שבין הישרים הבאים:

$l_1:\ \underline{x}=(3,-11,2)+t(2,4,-1)$, $l_2:\ \underline{x}=(7,0,-1)+s(0,5,-1)$

72) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$l:\ \underline{x}=(1,0,3)+t(-3,1,-5)\quad,\quad \pi:\ 2x-y-3z+5=0$$

73) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$l:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)\quad,\quad \pi:\ 3x-2y+2z+9=0$$

74) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:

$$\pi_1:\ 3x+2y-z-8=0\quad,\quad \pi_2:\ 5x-y-z+10=0$$

75) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:

$$\pi_1:\ 4x+3y+z-12=0\quad,\quad \pi_2:\ 4x-7y+5z+3=0$$

76) מצא את המרחק שבין הנקודות $A(-1,3,2)$ ו- $B(9,1,0)$.

77) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(-4,12,-5)$ לישר $l:\ \underline{x}=(1,1,-4)+t(3,-1,2)$.

78) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $l:\ \underline{x}=t(2,0,-7)$.

79) נתונות הנקודות: $A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

80) על הישר $l:\ \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(5,3,-1)$ למישור $x-2y+2z-12=0$.

82) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

83) מצא משוואת מישור המאונך לישר $l:\ \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

84) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$, $\pi:\ 2x+4y-4z+15=0$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקדקודיה הם:

$$A(1,6,-1)\ ,\ B(2,-1,0)\ ,\ C(6,-4,0)\ ,\ S(11,-2,4)$$

86) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$, $SB=8$, $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקדקוד S לבסיס ABC.

87) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-4,6,4)+t(2,3,0)$, $l_2:\ \underline{x}=(1,7,1)+s(2,3,0)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

88) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(2,-4,1)+t(-5,1,-4)$, $\pi:\ 2x+6y-z+6=0$.
הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק שבין הישר למישור.

89) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+2y-z+7=0$, $\pi_2:\ 2x+2y-z-5=0$.
הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק שביניהם.

90) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

91) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1:\ x-2y-2z+6=0$, $\pi_2:\ x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

92) נתונים שני הישרים הבאים:
$l_2:\underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$, $l_1:\underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

93) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:
$l_3:\ \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$, $l_4:\ \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם:

94) מצא את מרחק הישר $l:\ \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

95) נתונה קובייה 'ABCDA'B'C'D שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1:\ 4x+y+3z-28=0$.

משוואת המישור שעליו מונחת הפאה 'ABB'A היא: $\pi_2:\ x+2y-2z+6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-2,1,5)+t(5,-4,2)$, $l_2:\ \underline{x}=(-7,3,-1)+s(-5,4,-2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1.
מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2.

97) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x-y+4z-8=0$, $\pi_2:\ x-y+2z-4=0$.

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA=m$ (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.

98) נתונות שלוש נקודות: $A(3,-1,1)$, $B(2,-1,0)$, $O(3,1,0)$.

הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.

מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A

(הישר נמצא במישור המעגל).

99) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.

מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

100) נתונים מישור וישר: $\pi:\ 2x-y+2z+1=0$, $l:\ \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.

מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x-4y+4z-5=0$, $\pi_2:\ 4x-2y+4z-1=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102) נתונים ישר ומישור: $l_1:\ \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$, $\pi:\ 6x+2y-z+5=0$.
ישר נוסף, l_2, המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר l_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה 'P היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה 'Q היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצא את שטח המלבן 'PQQ'P.
(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של l_2).

103) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+y+z-5=0$, $\pi_2:\ 3x+y+2z+11=0$.
l_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר l_1 ויוצר זווית של 60^o עם הישר $l_2:\ \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות:

2) $\underline{u}=(5,8,0)$, $\underline{v}=(5,8,6)$. 3) $D(6,-8,1)$. 4) $\underline{u}=(4,11,5)$. 5) $(7,1,2)$.

6) א. $\overset{\frown}{AB}=(9,-4)$. ב. $Q=(12,8)$. 7) א. $\overset{\frown}{EF}=(5,-1,0)$. ב. $N(-1,-5,10)$.

8) $D(6,-8,1)$. 9) $u=(0,-7,6)$, $v=(-4,7,6)$.

10) א. $(5,4,6)$. ב. $(1,10,-4)$. ג. $(6,14,2)$. ד. $(7,24,-2)$. ה. -10. 11) $\sqrt{21}$.

13) ב. כן. 14) $102.19°$. 15) א. $97.277°$. ב. $90°$. ג. $180°$. 16) 10.173 יח"ש.

17) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$. 18) כן. 19) לא. 20) $l:\underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$.

21) $l:\underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$ 22) $l:\underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$. 23) $l:\underline{x}=t(0,1,0)$.

24) $l:\underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$. 25) $(7,-5,0)$. 26) מתלכדים. 27) מקבילים.

28) נחתכים, $(1,5,0)$. 29) מצטלבים. 30) מקבילים. 31) נחתכים, $(1,8,-1)$.

32) א. $k=2$. ב. $k=-2$. 34) $\pi:\underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

35) $\pi:\underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$. 37) $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

38) $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$. 39) $\pi:\underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

40) א. על המישור. ב. לא על המישור. 41) $k=3$. 42) $(3,0,0)$, $(0,4\frac{1}{2},0)$, $(0,0-9)$.

43) $l:\underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$. 44) $\pi:\underline{x}=(0,0,8)+t(0,-2,-8)+s(-8,0,-8)$.

45) $\pi:\underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$. 46) $\pi:-2x+3y+z+19=0$.

47) $\pi:x-3y+8z=0$. 48) $\pi:3x+6y-z-6=0$. 51) $\pi:y=0$. 52) $k=3$.

53) 6 יח"נ. 54) הישר חותך, $(1,-1,3)$. 55) מקבילים. 56) הישר מוכל.

57) הישר חותך, $(3,0,4)$ 58) $a=1$, $b=-7$. 59) $l:x=t(1,9,13)$.

60) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. 61) א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$. 62)

$\pi_{A'B'C'D'}:2y+z+2=0$. 63) $l:\underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

64) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$. 65) $l:x=(0,4,10)+t(4,7\frac{1}{2},10)$.

66) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$. 67) $l:\underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$. 68) $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

69) $\pi_1:y+z=0$, $\pi_2:x+y-z-6=0$. 70) $l':\underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

71) $26.01°$. 72) $21.19°$. 73) $18.87°$. 74) $43.94°$. 75) $90°$. 76) $\sqrt{108}$.

77) $\sqrt{91}$ 78) $\sqrt{54}$. 79) 12.75 יח"ש. 80) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$. 81) 5. 82) $2\frac{1}{2}$.

83) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$. 84) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

85) 20.5 יח"נ. 86) 4.46 יחידות אורך. 87) $\sqrt{22}$. 88) $\frac{15}{\sqrt{41}}$. 89) 4.

90) $\pi_1:3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2':3x-4y+5z-30=0$. 91) $\pi_3:x-2y-2z-3=0$.

92) $\frac{4}{\sqrt{\ }}$. 93) 1.567. 94) $\sqrt{2}$.

95) $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z=0$ או $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z+12=0$.

96) א. מקבילים. ב. $\pi_1:2x+2y-z+7=0$, $\pi_2:y+2z-6=0$. 97) $m=4,-\frac{4}{7}$.

98) $l:x=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$. 99) $\pi:-3x+y+3z+15=0$.

(100 $(0,0,4)$ או $(0,0,14\frac{4}{5})$.   **(101** $l:\underline{x}=(0,-14,-15\frac{3}{4})+t(-14,14,21)$.

(102 10.476 יח"ש.   **(103** $\pi_2: x+2y-z-58=0$ או $\pi_2: 2x+y+z-5=0$.